

Les cordes cosmiques dans le ${}^4\text{He}$ superfluide

Ivan Dimitrijević



August 8, 2003

1 Introduction

Le mécanisme de formation de structures à grande échelle, comme les galaxies, est d'un grand intérêt pour la cosmologie. Certaines hypothèses sur cette formation sont très difficiles à vérifier expérimentalement.

Un des scénarios possible implique la création de défauts topologiques. Après le big bang, au temps de 10^{-34}s , l'univers naissant a subi une ou plusieurs transitions de phase qui ont engendré des brisures de symétrie transformant des états ordonnés en états désordonnés. On a émis l'hypothèse que ces transitions de phase ont provoqués les défauts topologiques et l'inflation de l'univers.¹

Une forme particulièrement intéressante de défauts sont les défauts linéaires, soit les cordes cosmiques. Les cordes cosmiques se forment quand il y a une brisure de symétrie axiale ou cylindrique. Zel'dovich² a proposé que les cordes cosmiques produisaient des perturbations de densité qui pouvaient servir de germes pour la condensation gravitationnelle de la matière. Cette idée a été développée par Vilenkin^{3,4} et Kibble⁵. La densité de cordes est l'unique grandeur expérimentale que l'on puisse mesurer et qui peut nous renseigner sur l'évolution

¹Les défauts topologiques sont de quatre types: défauts ponctuels (monopoles), défauts linéaires (cordes), défauts superficiels ("domain walls"), et finalement les "textures".

²Zel'dovich, Ya.B., Kobzarev, I.Yu. & Okun, L.B., *Zh. eks. teor. Fiz.* **67** (1974)

³Vilenkin, A., *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1496 (1981)

⁴Vilenkin, A., *Phys. Rev.*, **24**, 2082 (1981)

⁵Kibble, T.W.B., *J. Phys A* **9**, 1387, (1976)

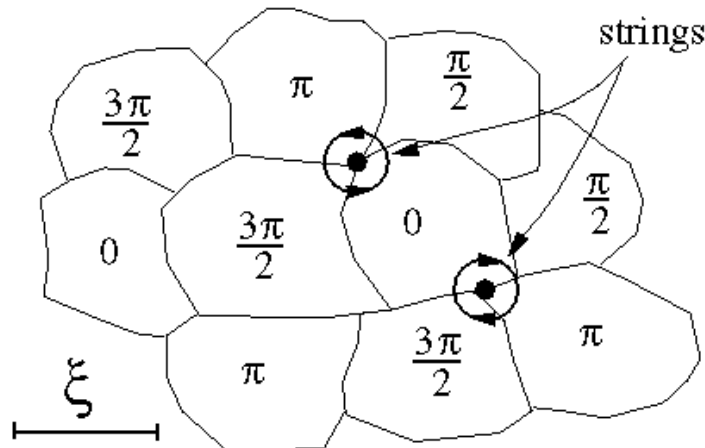
du champ de Higgs Φ juste après le big bang, qui nous aide à simuler la formation des galaxies.

Les systèmes quantiques hors équilibre en matière condensée sont les plus appropriés à l'étude phénoménologique, parce qu'ils sont maniables dans un laboratoire. La majorité des systèmes qu'on étudie (supraconducteurs, superfluides, alliages binaires) parviennent dans leurs états antisymétriques à travers d'une transition du deuxième ordre. Le seul système étudié expérimentalement pour la formation des défauts topologiques qui subit une transition de phase du premier ordre est celui des cristaux liquides dans la phase nématique.

Parmi ces nombreux candidats, le système adéquat pour comprendre la dynamique de formation des défauts est le ${}^4\text{He}$. La raison en est simple: le ${}^4\text{He}$ ne peut produire qu'un seul type de défaut, les tourbillons. Lors de la transition du deuxième ordre entre ${}^4\text{He}$ normal (HeI) et ${}^4\text{He}$ superfluide (HeII), qui peut être très rapide lors d'une décompression rapide, le groupe de symétrie $U(1)$ est brisé et on observe des défauts topologiques en forme de filaments tourbillonnaires. Les tourbillons quantifiés peuvent être assimilés à au moins un type de cordes cosmiques. Ainsi le ${}^4\text{He}$ est un "laboratoire" qui nous permettra de vérifier nos hypothèses sur la formation des cordes cosmiques.

2 La formation des défauts

Revenons à la question de la densité des cordes après la transition. Un scénario de formation de cordes cosmiques a été proposé par Kibble⁶ en 1976. On appelle ce scénario le "mécanisme de Kibble" et il postule que la création des cordes cosmiques implique le aggrandissement du champ de Higgs Φ lors d'une transition de phase hors-équilibre rapide induite par la chute de température de l'Univers en expansion. Après la transition de phase, le champ prend des valeurs non-nulles, mais avec un décalage de phase entre diverses régions séparées par l'horizon de causalité qui est plus petit ou égal à ct . Les défauts linéaires se forment sur les bords de ces régions car si on suit un circuit fermé (tel que sur la figure, qui décrit la formation de cordes selon le mécanisme de Kibble, ξ - longueur de corrélation), on remarque que la phase change de $2\pi n$, n entier. On dit que le champ est nul au moins une fois dans le circuit, donc il existe au moins un défaut par circuit.



L'inconvénient du mécanisme de Kibble est qu'il ne nous donne pas l'échelle à laquelle la formation des défauts apparaît. Il dépend en effet de la température comme critère, ce qui

⁶Kibble, T.W.B., *J. Phys A* **9**, 1387, (1976)

est incompatible avec un système hors-équilibre. Kibble avait de plus postulé que la densité de défauts serait déterminée par la longueur de corrélation du champ ξ_G à $T_G \simeq 1.5K$, la température de Ginzburg. L'enchevêtrement de cordes gèle dans une configuration stable à T_G , les fluctuations thermiques n'étant plus suffisamment fortes pour reconfigurer les défauts.

L'autre hypothèse s'appelle le "scénario de Zurek" [4], qui s'applique seulement aux transitions du deuxième ordre. Il faut préciser que le mécanisme de Kibble reste valable pour les deux types de transition de phase, tandis que le scénario de Zurek est valable uniquement pour les transitions du deuxième ordre.

L'essentiel du scénario de Zurek est que la densité de défauts va dépendre de la vitesse à laquelle la transition de phase se produit. Le champ va être incapable de s'"adapter" complètement pendant le passage dans la région de transition et l'échelle temporelle, pendant laquelle le champ reste dans ce régime indéfini, va déterminer la longueur de corrélation $\xi(T_Z)$ et la densité de défauts.⁷ Autrement dit, la densité de défauts va être plus petite (grande) si le temps de passage par la région de transition, τ_Q , est plus long (court).

L'idée de Zurek était d'utiliser le 4He pour simuler la formation des cordes et de nous fournir des informations sur la taille de l'horizon de causalité formé lors du gel des défauts. Son raisonnement était que si on fait subir à un échantillon de 4He une transition λ , on peut indirectement observer la densité de défauts en mesurant le second son. Pour vérifier le scénario de Zurek⁸, une expérience a été montée à Lancaster University⁹. Un échantillon d' 4He de $10^{-3} kg$ de haute pureté (pour assurer que les défauts n'étaient pas dûs à la nucléation des impuretés) est placé dans un soufflet fait d'un alliage phosphore-bronze. Le soufflet est comprimé et on laisse l'échantillon atteindre l'équilibre thermique avant de relâcher le soufflet qui se dilate de $4mm$ en $3ms$. La température et la pression sont mesurées et la densité de tourbillons est mesurée indirectement par atténuation du second son.¹⁰

Bien que l'expérience de Lancaster a soutenu le scénario de Zurek, il reste des problèmes non résolus. L'apparition des tourbillons lors des décompressions rapides dans la phase superfluide, mais juste en-dessous de la transition, est mal comprise et mal expliquée. On appelle ce phénomène les tourbillons sous-critiques (sous- T_c), car ils apparaissent dans une région du diagramme de phase où on ne s'attend pas à observer la production de tourbillons. Les idées présentées dans le but de résoudre cette énigme des tourbillons sous-critiques devraient être vérifiées par de nouvelles expériences (modifications sur l'expérience à Lancaster, expérience semblable à Helsinki avec 3He).

La première idée était que la forme même des parois du soufflet était responsable de la turbulence pendant la décompression. La deuxième idée était que les fluctuations thermiques de ϕ provoquaient les tourbillons sous-critiques ; malheureusement cette idée fournissait des valeurs minuscules pour la densité des défauts. La troisième idée, et la plus récente¹¹, est celle des jets du superfluide dans la cellule de l'expérience. Le capillaire qu'on utilise pour remplir la cellule de superfluide doit être long pour assurer l'isolation thermique. Il possède une valve au bout. Le changement brusque de la pression provoque un jet de fluide du capillaire dans l'échantillon. Les fluctuations thermiques à leur tour sont amplifiées par le

⁷ T_Z est la température de Zurek, la température à laquelle l'adaptation du champ ralentit.

⁸Zurek, W. H., *Nature* **317** 505-508 (1985)

⁹Hendry, P.C. et al., *Nature* **368** 315-317 (1994)

¹⁰Le second son est une onde dans laquelle les densités ρ_n (fluide normal) et ρ_s (superfluide) oscillent en opposition de phase, de sorte que leur somme reste constante.

¹¹Gill, A. J., Kibble, T.W.B., *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 4289-4305 (1996)

jet, produisant les tourbillons sous-critiques.

3 Modèle de Ginzburg-Landau pour ${}^4\text{He}$

L' hélium 4 subit une transition de phase à la température de $T_c = 2.18\text{K}$ (selon Feynman [2]). C'est une transition de deuxième ordre aussi appelé transition λ , en raison de l'allure la courbe de la chaleur spécifique c_p autour de T_c . Les propriétés de HeII sont assez étonnantes. La conductivité thermique est infinie, la viscosité est nulle, le liquide ne se condense pas (mais il s'évapore), il grimpe les parois d'un capillaire de diamètre défini, etc. Pour construire un modèle du superfluide, on utilise la théorie de Ginzburg-Landau des transitions de phase que l'on applique à la transition λ .

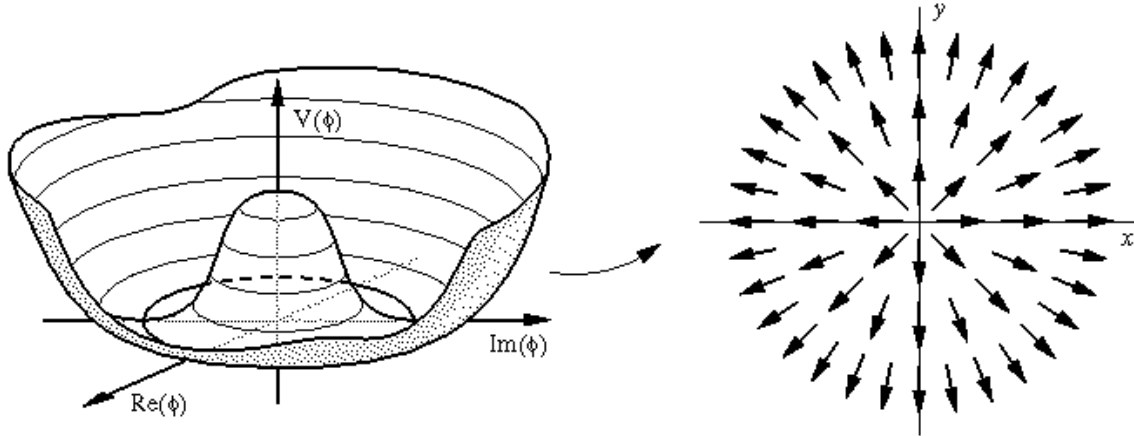
Le potentiel est donné par

$$V(\phi, T) = \alpha|\phi|^2 + \frac{\beta}{2}|\phi|^4, \quad (1)$$

ou $\beta = \text{const.}$ et

$$|\alpha| = \frac{\hbar^2}{2m\xi^2}, \quad (2)$$

avec $\xi = \frac{\xi_0}{|\varepsilon|^\nu}$, $\varepsilon = 1 - \frac{T}{T_c}$. Dans notre cas on choisit $\nu = 0.5$. La variable ξ est la longueur de corrélation dans le champ complexe ϕ . L'allure de $V(\phi, T)$ est un chapeau mexicain. Ci-dessous sont les figures de la forme de $V(\phi, T < T_c)$, et du champ d'un défaut.



Les minima sont calculés à partir du minimum de $V(\phi, T)$,

$$\frac{\partial V(\phi, T)}{\partial |\phi|^2} = 0, \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}}.$$

A l'équilibre thermique $\langle |\phi|^2 \rangle = \phi_0 = \sigma$. La propriété qui nous permet de faire des comparaisons entre les transitions de phases dans l'univers primordial (hautes énergies) et les phénomènes dans les systèmes en matière condensée est la propriété mathématique que ces deux systèmes ont en commun: le comportement du paramètre d'ordre autour de T_c .¹²

Dans la théorie générale des transitions des phases du deuxième ordre, ϕ caractérise les propriétés de symétrie du système. Donc, dans notre cas le paramètre d'ordre ϕ est souvent

¹²Rappelons nous que le champ ϕ est aussi appelé le "paramètre d'ordre".

considéré comme étant la fonction d'onde du condensé de Bose:

$$\phi = \rho e^{i\theta}.$$

Le mécanisme de Kibble concerne le champ de Higgs Φ , qui est l'analogie à l'échelle cosmologique du paramètre d'ordre ϕ .

Le lagrangien pour ϕ s'obtient en ajoutant des termes cinétiques aux termes de l'énergie potentielle:

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\phi^*)(\nabla\phi) - (\alpha|\phi|^2 + \frac{\beta}{2}|\phi|^4), \quad (3)$$

ou m est la masse de ${}^4\text{He}$. La densité du superfluide étant donnée par $\rho_s = m|\phi|^2$.

Les équations de Euler-Lagrange nous fournissent les équations de mouvements pour ϕ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \nabla\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\phi}\right) = 0. \quad (4)$$

Ceci donne comme résultat

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \alpha\phi + \beta|\phi|^2\phi$$

et

$$\nabla\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\nabla\phi} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi.$$

L'équation obtenue est:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + (\alpha + \beta|\phi|^2)\phi = 0, \quad (5)$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + \frac{\partial V(\phi, T)}{\partial|\phi|^2}\phi = 0. \quad (6)$$

Une propriété du ${}^4\text{He}$ au dessous de T_c est que dans certaines régions, coexiste un mélange d'état normal (HeI) et superfluide (HeII). Ceci donne lieu à un mouvement dans la partie superfluide; plus précisément, dû au fait que la phase θ change dans la partie superfluide, on a une vitesse $v_s = \frac{\hbar}{m}\nabla\theta$, avec énergie cinétique du tourbillon $T = \frac{1}{2}\rho_s v_s^2$. On peut aussi dire que le terme $\nabla^2\phi$ fait en sorte de "bouger" le champ pour maintenir θ constant.

4 Le comptage des défauts

L'approximation du champ moyen (Gaussien ou Hartree) nous donne que

$$\phi^3 = |\phi|^2\phi = 3\langle|\phi|^2\rangle\phi = -3\alpha\beta^{-1}\phi.$$

L'équation du mouvement s'écrit donc:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + \alpha\phi + \beta(-3\alpha\beta^{-1})\phi = 0,$$

ou bien

$$\left(-\nabla^2 + \frac{4m\alpha}{\hbar^2}\right)\phi = 0.$$

On pose que

$$\lambda^2 = \frac{4m\alpha}{\hbar^2} \quad (7)$$

et on obtient une équation aux valeurs propres

$$\nabla^2 \phi = \lambda^2 \phi. \quad (8)$$

La densité des cordes en champ Gaussien est donnée comme

$$\langle n \rangle = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{G''(r=0)}{G(r=0)} \right| \quad (9)$$

ou $G(r)$ est la solution de l'équation aux valeurs propres. La fonction de Green $G(r)$ s'obtient en calculant la transformée de la fonction de Green, $\hat{G}(k)$. Pour faire ceci on fait subir à l'équation aux valeurs propres une transformée de Fourier:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla^2 \phi(\mathbf{r})) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3x = \frac{\lambda^2}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3x. \quad (10)$$

L'intégrale à droite de l'égalité est simplement $\hat{\phi}(\mathbf{k})$.

Pour calculer la partie gauche on étudie d'abord l'analogie en une dimension:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} e^{ikx} dx = \left[\frac{d\phi(x)}{dx} - ik\phi(x) \right] e^{ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - k^2 \hat{\phi}(k)$$

La fonction $\phi(x)$ est à décroissance rapide, donc les premiers termes s'annulent aux bords (à $\pm\infty$), ce qui ne laisse que le terme $-k^2 \hat{\phi}(k)$.

Dans le cas tridimensionnel l'équation (10) devient:

$$-\mathbf{k}^2 \hat{\phi}(\mathbf{k}) = \lambda^2 \hat{\phi}(\mathbf{k})$$

$$(\mathbf{k}^2 + \lambda^2) \hat{\phi}(\mathbf{k}) = 0.$$

En termes de fonctions de Green:

$$(-\nabla^2 + \lambda^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

$$(\mathbf{k}^2 + \lambda^2)\hat{G}(\mathbf{k}) = 1$$

La fonction de Green,

$$\hat{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}, \quad (11)$$

nous donne,

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + \lambda^2} d^3k. \quad (12)$$

Pour calculer cette intégrale on utilise la symétrie du vecteur \mathbf{k} (une fois \mathbf{r} fixé le long de l'axe z) pour déduire que:

$$G(r) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{-ikr \cos \theta}}{k^2 + \lambda^2} k^2 \sin \theta d\theta d\varphi dk,$$

$$G(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2 + \lambda^2} \left[\int_0^\pi e^{-ikr \cos \theta} d(\cos \theta) \right] dk,$$

$$G(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + \lambda^2} \sin(kr) dk.$$

Cette intégrale est donnée dans les tables (selon Abramowitz [1]) comme égale à :

$$G(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lambda r}}{r}. \quad (13)$$

Pour trouver la densité de défauts on calcule la deuxième dérivée,

$$G'(r) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\lambda r}}{r} \left(\lambda + \frac{1}{r} \right),$$

$$G''(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{-\lambda r}}{r} \left(\lambda^2 + \frac{2\lambda}{r^2} + \frac{2}{r^3} \right) \right].$$

On obtient donc la solution pour cette densité de cordes :

$$\langle n \rangle = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{G''(r=0)}{G(r=0)} \right| = \frac{1}{2\pi} \left(\lambda^2 + \frac{2\lambda^2}{r} + \frac{2\lambda}{r^2} \right) \Big|_{r=0}. \quad (14)$$

Il est évident que les deux derniers termes divergent en $r = 0$. Il s'agit de discuter plus en détail ce problème de divergence.

En faisant une simple analogie avec la météorologie, on peut comparer notre échantillon de ${}^4\text{He}$ qui subit une transition de phase avec formation de tourbillons dans un cyclone tropical. Dans ces cyclones une importante masse nuageuse se forme en bandes spirales enroulées autour d'un centre: l'oeil du cyclone. Les propriétés (dynamiques et thermodynamiques) des cyclones sont distribuées asymétriquement autour du tourbillon central et ceci provoque un mouvement tourbillonnaire de l'air. L'oeil peut être comparé à notre corde. A l'intérieur de la masse nuageuse on peut avoir des mini-cyclones (structures qui, sur une échelle plus petite, imitent le cyclone entier) qui apparaissent et disparaissent. Remarquons que sur les photos satellites, dont l'échelle est la longueur de cohérence de structures, on n'observe qu'une grande formation, le cyclone lui-même, et pas les petits mini-cyclones.

Autrement dit, pour pouvoir calculer une densité de cordes valable par élément de volume

$$k^2 \sin \theta d\theta d\varphi dk$$

on doit tenir compte de la longueur de cohérence des structures. Il faut négliger les structures plus petites que la longueur de corrélation ξ ; on préfère ne compter que les tourbillons cohérents qui persistent, et non pas les fluctuations de petite échelle. Dans notre intégrale ceci veut dire que les valeurs de k ne doivent pas être trop grandes, donc $k < \frac{1}{\xi}$. Mathématiquement ceci veut dire que l'élément de volume augmente avec les valeurs de k grandes.

Il faut donc considérer une nouvelle approche. On va d'abord discuter du caractère de cette intégrale. Au lieu de calculer analytiquement $G(r)$ pour ensuite insérer le résultat dans la formule pour $\langle n \rangle$, on insère directement l'intégrale dans la formule en faisant tendre r vers 0:

$$G(r=0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + \lambda^2} \sin(kr) dk.$$

Il faut encore introduire la notion du “smoothing”, une fonction qui va limiter les valeurs de k à des valeurs qui ne dépassent pas $k < \frac{1}{\xi}$. La question se pose: comment faire un “smoothing” satisfaisant? On essaye avec une fonction exponentielle de carré décroissante (gaussienne), $e^{-(k\xi)^2}$:

$$\tilde{G}(r=0)_{k < \frac{1}{\xi}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + \lambda^2} \sin(kr) e^{-(k\xi)^2} dk.$$

Ceci va nous donner l’expression suivante pour la densité des défauts:

$$\langle n \rangle = \left| \frac{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{d^2}{dr^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + \lambda^2} \sin(kr) e^{-(k\xi)^2} dk}{\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{r} \int_0^\infty \frac{k}{k^2 + \lambda^2} \sin(kr) e^{-(k\xi)^2} dk} \right|.$$

Pour résoudre notre intégrale on utilise des méthodes de l’analyse complexe.¹³ Tout d’abord on remarque que le numérateur est composé de deux fonctions impaires (k et $\sin(kr)$) et d’une fonction paire $e^{-(k\xi)^2}$. Le numérateur est donc pair et on peut écrire:

$$\int_0^\infty \frac{k}{k^2 + \lambda^2} \sin(kr) e^{-(k\xi)^2} dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{k}{k^2 + \lambda^2} \sin(kr) e^{-(k\xi)^2} dk.$$

Définissons

$$f(z) = \frac{ze^{irz} e^{-(\xi z)^2}}{(z + i\lambda)(z - i\lambda)},$$

avec $z = Re^{i\phi}$, un nombre complexe. A la fin des calculs on ne prend que la partie imaginaire du résultat car $e^{irz} = \cos(rz) + i \sin(rz)$.

On applique à présent ces méthodes à notre intégrale, qui est maintenant de la forme:

$$I_C = \frac{1}{2} \int_C \frac{ze^{irz} e^{-(\xi z)^2}}{(z + i\lambda)(z - i\lambda)} dz.$$

Le contour C qu’on choisi est le demi-cercle supérieur γ (qui entoure la singularité $z_0 = i\lambda$) et l’axe x de $-R$ à R . On va nommer ces deux intégrales I_γ et I_R .

$$I_C = I_R + I_\gamma = \frac{1}{2} \int_C \frac{ze^{irz} e^{-(\xi z)^2}}{(z + i\lambda)(z - i\lambda)} dz.$$

$I_C = \frac{1}{2} 2\pi i \text{Res}(f, z_0 = i\lambda)$ par le théorème des résidus.

$$\text{Res}(f, z_0 = i\lambda) = \lim_{z \rightarrow i\lambda} (z - i\lambda) \frac{ze^{irz} e^{-(\xi z)^2}}{(z + i\lambda)(z - i\lambda)} = \frac{1}{2} e^{\lambda r} e^{(\lambda\xi)^2}.$$

Donc,

$$I_C = i \frac{\pi}{2} e^{-\lambda r} e^{(\lambda\xi)^2}.$$

Le calcul de I_R est simple maintenant; il suffit de montrer que I_γ tend vers 0 pour $\pm R \rightarrow \infty$, ce qu’on démontre dans l’appendice avec l’aide du lemme de Jordan.

¹³c.f. appendice.

Voilà nous sommes arrivés à notre résultat pour la fonction de Green “lisse” (“smooth”):

$$\tilde{G}(r) = \frac{\pi}{2} e^{-\lambda r} e^{(\lambda \xi)^2}.$$

Avec cette nouvelle valeur pour $G(r)$ qu'on a noté $\tilde{G}(r)$, on refait le calcul pour la densité des défauts.

$$\begin{aligned} \tilde{G}''(r) &= \lambda^2 \tilde{G}(r), \\ \langle n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\tilde{G}''(r=0)}{\tilde{G}(r=0)} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \lambda^2 \frac{\frac{\pi}{2} e^{-\lambda r} e^{(\lambda \xi)^2}}{\frac{\pi}{2} e^{-\lambda r} e^{(\lambda \xi)^2}} \right| = \frac{1}{2\pi} |\lambda^2|. \end{aligned}$$

Quelle surprise! C'est en fait le seul terme non-divergent dans notre équation précédente. Les termes en $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r^2}$ ont disparu.

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\pi \xi_0^2} \left| 1 - \frac{T}{T_c} \right| = \frac{1}{\pi \xi_0^2} |\epsilon|.$$

Si on prend $\xi_0 = 5,6 \text{ \AA}$, $\epsilon_Z = 3 \times 10^{-3}$ (la valeur à T_Z obtenue par le groupe de Lancaster) et $\pi = 3.14$ la valeur approximative est

$$\langle n \rangle \simeq 10^{15} m^{-2},$$

ce qui donne un défaut par $10^{-15} m^2$. La prediction de Kibble était

$$\langle n \rangle = \frac{1}{\xi_0^2}$$

ce qui diffère de notre valeur à $T = 0K$ de $\frac{1}{\pi}$. La limite inférieure obtenue par le groupe de Lancaster est:

$$\langle n \rangle \geq 10^{11} m^{-2}.$$

5 Corrélation des défauts

Les fonctions de corrélation de la densité de défauts peuvent nous donner des informations sur la longueur des tourbillons sous-critiques. Plus précisément, selon le mécanisme de Kibble, les tourbillons sous-critiques peuvent être générés après des fluctuations thermiques. Les résultats de nos calculs doivent nous dissuader de cette idée car l'expérience de Lancaster montre que l'existence des défauts d'une grande longueur est peu probable dans les régions sous-critiques, donc ce ne sont pas les fluctuations thermiques qui sont à la base des tourbillons sous-critiques.

Les éléments de matrice de la fonction de corrélation sont donné par l'expression suivante:

$$G_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle n_i(\mathbf{r}) n_j(\mathbf{r}) \rangle_{t=0} = G_L(\mathbf{r}, t) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j + G_T(\mathbf{r}, t) (\delta_{ij} - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j) \quad (15)$$

Les deux termes G_L (corrélations longitudinales) et G_T (corrélations transversales) sont calculé à partir d'une fonction h telle que,

$$h(r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\tilde{G}'(r)}{\sqrt{\tilde{G}^2(0) - \tilde{G}^2(r)}} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e^{-\lambda r}}{\sqrt{1 - e^{-\lambda r}}},$$

$$\tilde{G}(0) = \frac{\pi}{2} e^{(\lambda\xi)^2} = C(T).$$

$$\tilde{G}'(r) = -\lambda\tilde{G}(r).$$

Les résultats pour nos composantes longitudinales et transversales de la fonction de corrélation en deux points sont donnés ci-dessous.

$$G_L(r) = n! \left(\frac{h}{r}\right)^n = \frac{\lambda^2}{2\pi^2 r^2} \frac{e^{-2\lambda r}}{1 - e^{-2\lambda r}},$$

$$G_T(r) = n! \left(\frac{h}{r}\right)^{n-1} \frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{\lambda^3}{2\pi^2 r} \frac{e^{-2\lambda r}}{(1 - e^{-2\lambda r})^2}.$$

G_L nous donne la longueur caractéristique des segments linéaires des tourbillons. Une valeur négative de G_L indique la présence d'une paire de tourbillon-antitourbillon à une distance r l'un de l'autre. G_T nous donne la probabilité qu'il existe un tourbillon (ou antitourbillon) dans la même direction à une distance r . Il faut tout de suite remarquer que toute valeur de G_L et G_T calculée pour $r < \xi$ ne devrait pas être prise en compte, pour la même raison qu'auparavant.¹⁴

Pour mieux comprendre l'utilité de ces fonctions de corrélation, il suffit de remarquer que si on divise G_T par $\langle n \rangle^2$ on obtient la probabilité de trouver un autre tourbillon à la distance r . Celle-ci est de signe négatif, ce qui signifie un antitourbillon (un tourbillon avec une rotation en sens inverse).

$$P(\text{tourbillon}, r) = -\frac{\lambda^3}{2\pi^2 r} \frac{e^{-2\lambda r}}{(1 - e^{-2\lambda r})^2} \frac{4\pi^2}{\lambda^4} = -\frac{2e^{-2\lambda r}}{\lambda r (1 - e^{-2\lambda r})^2}.$$

La probabilité de trouver un tourbillon par longueur de corrélation ξ est donnée dans l'estimation suivante ($\xi^2 = \frac{2}{\lambda^2}$):

$$P(\text{tourbillon}, r = \xi) = -\frac{2e^{-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}(1 - e^{-2\sqrt{2}})^2} \approx -0.1$$

La densité de défauts n'est donc pas très grande, car il n'existe que des tourbillons de la dimension de la longueur de corrélation, et il n'apparaît qu'un tourbillon par trois domaines de taille ξ .

Pour calculer la probabilité de l'échelle à laquelle les tourbillons dévient, on divise G_L par $\langle n \rangle^2$:

$$P(\text{deviation}) \approx 1.$$

Le tourbillon dévie sur une échelle de la dimension $\xi(T)$.

De ces résultats, on peut conclure que la production de tourbillons lors d'une décompression dans une région légèrement en-dessous de la transition (sous-critique) n'est pas due à des effets de fluctuation thermique. La densité de tourbillons produits par les fluctuations thermiques serait inférieure à la densité observée. Le fait que la longueur caractéristique des tourbillons est de l'ordre ξ nous indique qu'il n'y a plus d'enchevêtrement des tourbillons. C'est, en revanche, des petits boucles qui sont présentes. Un autre mécanisme de création de défauts est à la base de ce phénomène.

¹⁴c.f. page 9.

6 Conclusion

Le calcul de la densité des défauts topologiques dans un système en phase condensée nous permettra de mieux comprendre la formation de cordes cosmiques dans l'univers primordial. Dans notre approche, on a considéré une transition de phase de deuxième ordre associé à une brisure de symétrie du groupe $U(1)$, avec comme résultat la formation de défauts topologiques. Notre intérêt principal a été porté sur la question de la densité initiale des défauts parce que celle-ci nous donne les informations cruciales sur le comportement du paramètre d'ordre dans une transition de phase.

Selon le scénario de Zurek, qui a proposé des expériences dans le ${}^4\text{He}$ superfluide, l'échelle caractéristique qui détermine la densité de défauts est fixée à l'instant du ralentissement de l'adaptation du champ à des nouveaux paramètres thermodynamiques lors du passage à travers la région de la transition. Pour simplifier nos calculs on a fait la supposition de l'équilibre thermique, bien que le système est en fait hors-équilibre.

L'expérience de Lancaster a soutenu le scénario de Zurek, mais elle met également en évidence des problèmes supplémentaires qui ne rentrent pas dans le cadre de l'hypothèse de Zurek. Les tourbillons sous-critiques, produits dans les décompressions rapides juste en-dessous de la région de la transition ne peuvent pas être décrits seulement par des fluctuations thermiques. On a démontré ceci par des calculs de la densité et des fonctions de corrélation à deux points.

L'hypothèse d'un jet de superfluide provenant du capillaire qui remplit l'enceinte de la cellule de l'expérience peut nous fournir une explication satisfaisante à cette non-adéquation complète. Des modifications ont été effectuées sur la cellule de l'expérience à Lancaster et il se peut qu'un nouvel essai puisse supprimer l'effet néfaste de ce défaut expérimental.

La densité spatiale des tourbillons déduite de l'expérience à Lancaster a confirmé la prédiction de Zurek sur la densité initiale des cordes cosmiques. Cependant, la confirmation expérimentale du mécanisme qui crée des défauts topologiques ne suffit pas à montrer que les cordes cosmiques existent. Pour cela, il faudra les détecter dans l'Univers, par exemple en observant des discontinuités linéaires dans le rayonnement de fond cosmologique, ou en observant les variations de la période de pulsars milisecondes dues au rayonnement gravitationnel émis par des cordes cosmiques.

Appendice

Théorème des résidus

Soit f une fonction analytique sur une région simplement connexe D , sauf un nombre fini de singularités z_1, z_2, \dots, z_n sur D . Si C est une courbe simplement connexe et continue par morceaux dans D et qui ne passe pas par les singularités isolées (pôles) z_1, z_2, \dots, z_n alors,

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0 \in I(C)} \text{Res}(f, z_0).$$

Les séries de Laurent

Une fonction analytique peut être représentée par une série de Laurent,

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i (z - z_0)^i,$$

sur un anneau $r < |z - z_0| < R$. La partie principale est donné par $\sum_{i=-\infty}^{-1} a_i (z - z_0)^i$ et le résidu à z_0 est égal à a_{-1} .

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots,$$

série de Laurent pour $f(z)$ avec m pôles. Une formule assez générale pour le calcul des résidus (d'ordre m) est

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z).$$

($I(C)$ est intérieur de la courbe. $\text{Res}(f, z_0)$ sont les résidus au pôle z_0 de f .)

Lemme de Jordan

$$I_\gamma = \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) Re^{i\phi} d\phi,$$

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) Re^{i\phi} d\phi \right| \leq R \int_0^\pi |f(Re^{i\phi})| d\phi,$$

$$\left| \int_0^\pi f(Re^{i\phi}) Re^{i\phi} d\phi \right| \leq R \int_0^\pi \frac{Re^{-rR \sin(\phi)} e^{-R^2 \cos(2\phi)\xi^2}}{R^2 - \lambda^2} d\phi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Donc,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_\gamma = 0.$$

Ces calculs sont repris de l'ouvrage de Fisher [3].

References

- [1] M. Abramowitz A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1972.
- [2] R.P. Feynman. *Statistical Mechanics: A Set of Lectures*. Benjamin, 1972.
- [3] S.D. Fisher. *Complex Variables*. Brooks & Cole, 1990.
- [4] W. H. Zurek. "Cosmological Experiments in Condensed Matter Systems". *Physical Reports*, 276, 1996.